Secretaría de Educación
GOBIERNO DEL ESTADO DE YUCATÁN

XXVI OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

III OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICAS PARA ALUMNOS DE PRIMARIA

PROBLEMARIO

FASES DE SECTOR Y ENTIDAD

Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Yucatán

ELABORÓ: DR. DIDIER A. SOLÍS GAMBOA

❖ ¿CÓMO SON LOS EXÁMENES DE LA OLIMPIADA?

Sin duda alguna, la parte medular en la Olimpiada de Matemáticas la constituyen sus exámenes. Los exámenes de la Olimpiada de Matemáticas están diseñados para detectar a jóvenes con un talento natural hacia el pensar y quehacer matemático. Los problemas que conforman un examen de Olimpiada deben estar orientados a desarrollar la creatividad e ingenio de quienes los resuelvan. Para resolverlos, el estudiante debe hacer acopio de una gran dosis de creatividad, más que de conocimientos eruditos o procedimientos mecánicos. En niveles avanzados de la competencia los exámenes constan de solo 3 o 4 problemas de redacción libre, para los que se disponen de aproximadamente 4 horas para su resolución. Sin embargo, en las primeras fases del evento es preferible usar reactivos de opción múltiple. En el caso de la Olimpiada en Primarias, la **fase de Sector será de opción múltiple en tanto que la de Entidad será de redacción abierta**.

❖ CONTENIDOS

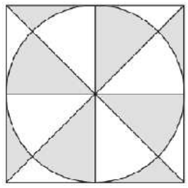
Los temas a tratar en la Olimpiada de Primarias se ajustan a los programas y planes de estudio oficiales en vigor. En la Olimpiada se premia la habilidad y el talento sobre la mecanización y la memorización, es decir, se considera más valiosa una idea novedosa y creativa que un conocimiento erudito. Por tal motivo, los contenidos a evaluar (especialmente en las primeras fases del evento) son mínimos. A grandes rasgos, los temas que cubren la Olimpiada en Primaria son los siguientes: Geometría (perímetros y áreas), Conteo, Aritmética, Lógica y Pre-álgebra.

❖ ¿CÓMO USAR ESTE MATERIAL?

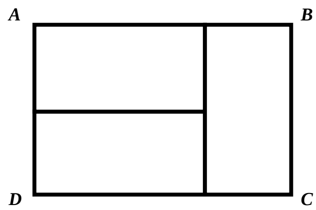
El presente material consiste en un problemario con soluciones, con reactivos en formato de redacción libre, así como el examen (sin solución) de la fase de entidad y el selectivo final de la Olimpiada del año pasado. El propósito de este material es brindar a los profesores, entrenadores y estudiantes una oportunidad de entrar en contacto con problemas similares a los que conforman los exámenes de las fases finales de la Olimpiada en Primarias. Invitamos a todos los docentes a que compartan estos problemas con sus estudiantes, y disfruten con ellos el proceso creativo de llegar a su solución.

GEOMETRÍA

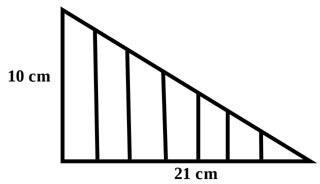
Problema 1.- Si el lado del cuadrado mide 1cm. ¿Cuánto vale el total de área sombreada en la figura?



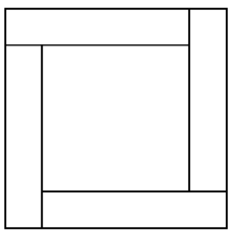
Problema 2. Con tres rectángulos iguales se formó un rectángulo más grande, como se muestra en la figura. Si el lado *BC* mide 2 cm, ¿cuánto mide el lado *AB*?



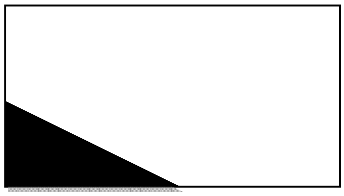
Problema 3. En la figura la distancia que separa las líneas verticales es siempre la misma. Si la mayor de todas las líneas verticales mide 10cm, ¿cuánto valdrá la suma de todas las líneas verticales?



Problema 4.- En la siguiente figura, los cuatro rectángulos son iguales. El perímetro de cada uno de ellos es 14 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?



Problema 5.- En un rectángulo se unen los puntos medios de dos lados seguidos, recortando una figura triangular. Si el rectángulo tenía área de $1cm^2$, ¿cuánto medirá el área del triángulo recortado?



ARITMÉTICA

Problema 6.- ¿Cuántos divisores de 100,000 son múltiplos de 1000?

Problema 7.- Encuentra el número más pequeño tal que la multiplicación de sus cifras da cómo resultado 105.

Problema 8.- José tiene 5 bolsas de canicas y cada una de ellas contiene canicas rojas y canicas blancas (es decir, en cada bolsa podría haber canicas de los dos colores). Las bolsas contienen 20, 21, 22, 23 y 24 canicas cada una. Ayer durante el recreo José perdió una de sus bolsas. Al llegar a su casa contó todas las canicas en las bolsas restantes y se dio cuenta de que el total de canicas rojas es 4 veces el total de las canicas blancas; ¿cuántas canicas había en la bolsa que José perdió?

PRE-ÁLGEBRA

Problema 9.- A la suma de los primeros 2012 números pares se le resta la suma de los primeros 2012 números impares. ¿Cuál es el resultado?

Problema 10.- Andrea, en sus tres primeros exámenes sacó 7, 8 y 10. ¿Cuánto debe sacaren el último examen para alcanzar promedio de 8?

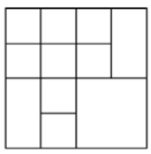
Problema 11.- Un conejo da 5 saltos mientras que un perro que lo persigue da 4, pero como el perro es más grande que el conejo, con 8 de sus saltos el perro avanza la misma distancia que el conejo cuando da 11 saltos. Si el conejo le lleva 66 saltos de ventaja al perro, ¿cuántos saltos ha de dar el perro para alcanzar al conejo?

Problema 12.- El entrenador más experimentado del circo necesita 40 minutos para bañar a un elefante. Su hijo lleva a cabo la misma tarea en 2 horas. ¿Cuánto tiempo tomará al entrenador y a su hijo bañar a 3 elefantes trabajando juntos?

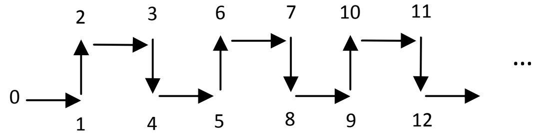
CONTEO

Problema 13.- En un tablero de ajedrez se coloca una ficha en una esquina y se traslada hasta la esquina opuesta. La ficha avanza de casilla en casilla, ya sea horizontal o verticalmente. ¿Es posible que la ficha haya pasado por todos los cuadros del tablero exactamente una vez? Justifica tu respuesta.

Problema 14. En la siguiente figura, ¿cuántos cuadrados aparecen? Nota: considera cuadrados de todos los tamaños.



Problema 15.- Si el camino sigue siempre el mismo patrón



¿En qué dirección apunta la flecha que va del 2011 al 2012?

Problema 16.- El mago Deeds acaba de terminar de escribir su libro de ciencias matemágicas, y tuvo el cuidado de escribir el número correspondiente en cada página del libro. Si el libro tiene 2011 páginas, ¿cuántas veces utilizó el mago Deeds el número “1” al escribir los números de página?

Problema 17.- Un número es *feliz* si la suma de sus cifras es 9, por ejemplo 12033 es un número feliz. ¿Cuántos números felices menores que 1000 hay?

LÓGICA

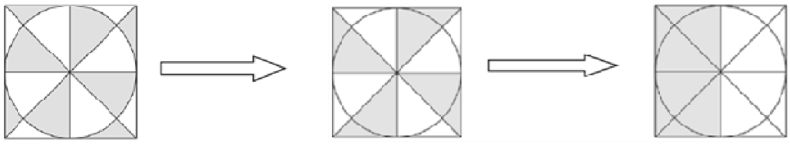
Problema 18.- Tony gana más que Leandro, pero menos que Manuel. Manuel gana más que Moisés y menos que José. Leandro gana más que Moisés y menos que José. ¿Quién gana menos?

Problema 19.- En la cocina había un pastel destinado al cumpleaños de Julio, pero al llegar a su casa nota que el pastel desapareció. En la casa hay cinco niños: Jhonny, Puc, Alan, Lobo y Álvaro. Julio sabe que alguno, o varios, son los autores del crimen, así que los interroga. He aquí sus respuestas: Jhonny: “Esto es obra de solamente uno de nosotros.” Puc: “No, de dos de nosotros.” Alan: “No, de tres de nosotros.” Lobo: “No, de cuatro de nosotros.” Álvaro: “Entre todos nos lo comimos.” Julio sabe que los inocentes dicen la verdad y que los culpables mienten; ¿quiénes son inocentes y quiénes son culpables?

Problema 20.- En cierta calle no hay casas del mismo color, no hay vehículo ni animales repetidos y tampoco se bebe lo mismo. Donde hay auto la casa es roja, pero no tienen oveja y tampoco se bebe vino. Donde se bebe vino hay un gato. Donde se bebe jugo, hay patines, no hay gato ni perro y la casa no es ni amarilla ni azul. Donde se bebe soda, hay una bicicleta pero no tienen ni gato ni oveja. Donde hay un conejo, la casa no es azul ni rosa, y no hay auto. Si en cada casa hay un vehículo, un animal y siempre se bebe algo, ¿en qué casa está el perro?

SOLUCIONES

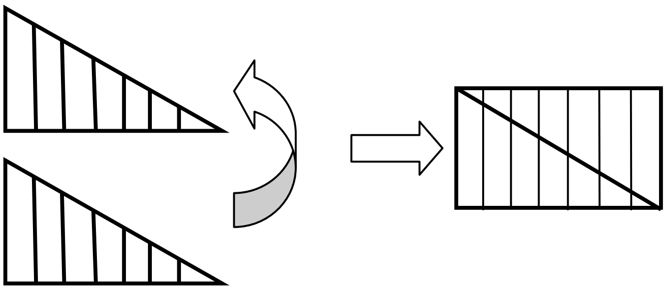
Problema 1.- Dada la simetría de la figura, podemos reacomodar las distintas partes de ella de la siguiente manera:



Por lo tanto, el área sombreada es la mitad del área del cuadrado, la cual es de $1cm^2$. Entonces el área buscada es de $0.5\ cm^2$.

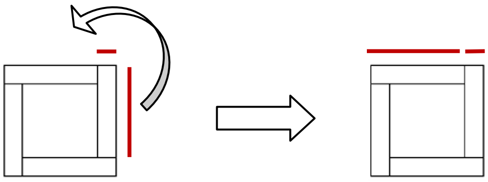
Problema 2.- La longitud de *AB* es la suma de la longitud del lado mayor y del lado menor de uno de los rectángulos pequeños. Sabemos que los tres rectángulos pequeños son iguales, por lo cual el lado menor de cada uno de ellos mide la mitad de *AD*, que es igual a la mitad de *BC* y por tanto es 1cm. Entonces, *AB* = 2 + 1 = 3cm.

Problema 3.- Consideremos dos figuras idénticas y las unimos sobre la diagonal del triángulo rectángulo como se muestra:



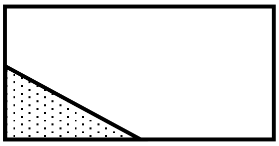
La longitud de cada línea vertical es igual a la longitud de un lado del rectángulo, es decir, 10 cm. Por tanto, la suma de todas estas longitudes es 8 x 10 = 80 cm. Pero entonces la suma de las longitudes de los segmentos verticales de un triángulo es 80 / 2 = 40 cm.

Problema 4.- Para poder hallar el área del cuadrado grande, hallemos primero el lado de dicho cuadrado. Notemos que el lado del cuadrado grande está formado por un lado menor y un lado mayor del rectángulo.

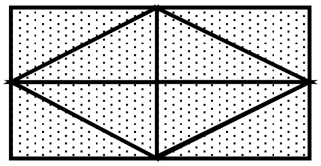


Como el perímetro del rectángulo es la suma de las longitudes de sus dos lados menores y sus dos lados mayores, entonces la longitud del lado del cuadrado grande será la mitad del perímetro del rectángulo. Por lo tanto, el lado del cuadrado grande mide 14 / 2 = 7 cm y en consecuencia el área del cuadrado es $7^2 = 49$ cm^2.

Problema 5.- De acuerdo al enunciado del problema, queremos hallar el área del triángulo rectángulo que se encuentra sombreado en la figura:



Notemos que es posible dividir el rectángulo original en 8 triángulos idénticos al triángulo sombreado.



Entonces el área del triángulo es un octavo del área del rectángulo. Concluimos que el área buscada equivale a 1 / 8 = 0.125 cm^2.

Problema 6.- Para resolver problemas de divisibilidad conviene usualmente hacer factorizaciones. Por un lado 100,000 = $2^5 \times 5^5$ de manera cada divisor D de 100,000 tienen que ser una potencia de dos multiplicada por una potencia de cinco (y que los exponentes no pasen de 5): $2^a \times 5^b$. Por otra parte, 1000 = $2^3 \times 5^3$, lo cual quiere decir que ni a ni b pueden ser más chicos que 3. Entonces a puede tomar los valores 3, 4, 5 mientras que b puede tomar los valores 3,4,5 de forma similar. Como cada una tiene tres opciones, el número total de divisores será 3 x 3 = 9.

Problema 7.- Aquí la idea principal consiste en descomponer (factorizar) el número 105 como un producto de dígitos. Esto puede hacerse usando un algoritmo similar al que se emplea para calcula el mínimo común múltiplo de un conjunto de enteros.

No tiene mitad pero tiene tercera parte, quedando 105 = 35x3. El número 35 tiene quinta parte y resulta 35=7x5. Entonces 105 = 7x5x3.

Queremos encontrar el número más pequeño que se puede obtener usando 7,5,3. Este número se construye poniendo a los dígitos 3, 5 y 7 en orden creciente de izquierda a derecha. Entonces el número buscado es 357.

Problema 8.- Fijémonos que el número de canicas con las que se quedó José es un múltiplo de 5. Esto sucede debido a que por cada tanto de canicas blancas que tenga, tendrá 4 veces esa cantidad de canicas rojas, siendo el resultado igual a 5 veces el número de canicas blancas. Por otro lado, José tenía originalmente 20 + 21 + 22 + 23 + 24 = 110 canicas. Como 110 es un múltiplo de 5, entonces a José se le perdieron un número de canicas que también es un múltiplo de 5. (Visto de otro modo, si el número de canicas que se perdieron dejara un residuo al dividirlo entre 5, el número total de canicas dejaría el mismo residuo, ya que José conservó una cantidad de canicas que es múltiplo de 5). Como sólo la primera bolsa tiene una cantidad de canicas que es múltiplo de 5, ésta debe ser la bolsa que perdió José. Por lo tanto, José perdió 20 canicas.

Problema 9.- Notemos primero que los primeros 2012 pares son 2, 4, 6, 8, … , 4024, y por tanto los primeros 2012 impares son 1, 3, 5, 7, … , 4023. La operación requerida es entonces: (2+4+6+8+...+4024) – (1+3+5+…+4023):

$$\begin{array}{rr} & 2+4+6+\dots+4022+4024 \\ - & 1+3+5+\dots+4021+4023 \\ \hline \end{array}$$

Ahora bien, notemos que esta diferencia también se puede calcular "reordanando", es decir, tomando la diferencia de los números en la primera columna, luego de la segunda columna, y así sucesivamente: 2 – 1 + 4 -3 + 6 -5 + … + 4024 - 4023

$$\begin{array}{rr} & 2+4+6+\dots+4022+4024 \\ - & 1+3+5+\dots+4021+4023 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 2 \\ -\,1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 4 \\ -\,3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 6 \\ -\,5 \\ \hline \end{array} + \dots + \begin{array}{r} 4024 \\ -\,4023 \\ \hline \end{array}$$

Pero, cada una de estas diferencias es igual a 1:

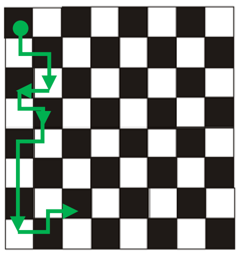
(2-1) + (4-3) + (6-5) + … + (4024-4023) = 1 + 1 + 1 + … + 1, por lo que el resultado de la operación es 1 x 2012 = 2012.

Problema 10.- Si el promedio de Andrea después de haber tomado 4 exámenes es 8, entonces habrá sumado un total de 4 x 8 = 32 puntos. Hasta ahora, sólo ha conseguido 7 + 8 + 10 = 25 puntos. Por tanto, a Andrea le faltan 32 – 25 = 7 puntos y ésta debe ser la calificación que debe sacar en su cuarto examen.

Problema 11.- El perro da 4 saltos mientras que el conejo da 5 saltos, es decir, el perro da 8 saltos mientras que el conejo da 10 saltos. Por otro lado, los 8 saltos que da el perro equivalen en distancia a 11 saltos del conejo. Entonces, cada vez que el conejo da 10 saltos, el perro recorre una distancia equivalente a 11 saltos de conejo. Vemos entonces que cada vez que el perro da 8 saltos, la distancia entre este y el conejo disminuye en un salto de conejo. Como el conejo le lleva 66 saltos al conejo, entonces el perro alcanzará al conejo después de 66 de estas repeticiones. Por lo tanto, lo alcanzará después de 66 × 8 = 528 saltos.

Problema 12.- El entrenador baña a un elefante en 40 minutos. Entonces podemos decir que el entrenador en un minuto limpia 1 / 40 de elefante. Su hijo baña a un elefante en dos horas, es decir, en 120 minutos, entonces en un minuto limpia 1 / 120 de elefante. Entonces trabajando juntos podrán limpiar 1 / 40 + 1 / 120 = 4 / 120 = 1 / 30 de elefante. Por lo tanto tardarán 30 minutos en bañar a un elefante, entonces tardarán 90 minutos en bañar a 3 elefantes. Es decir, tardarán una hora y media.

Problema 13.- Recordemos que el tablero de ajedrez tiene cuadros blancos y negros. Además, notemos que las esquinas opuestas son del mismo color. Supongamos que la ficha inicialmente está en la esquina superior izquierda, construyamos un camino que empieza en dicha esquina y anotemos el color de cada una de las casillas que recorre la ficha:

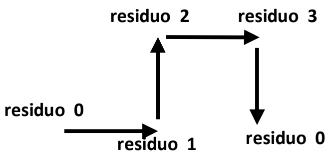


Colores	N	B	N	B	N	B	N	…
Casilla	1	2	3	4	5	6	7	…

De aquí podemos ver que si la ficha pasa por una cantidad par de casillas, la casilla final del camino será blanca, en tanto que si pasa por una cantidad impar de casillas, la casilla final será negra. Si el camino recorre todas las casillas, entonces habrá pasado por una cantidad par de ellas (64 para ser exactos) y en consecuencia el camino terminará en una casilla blanca. Como la casilla inferior derecha es de color negro, entonces no es posible hallar un camino con las características dadas. Lo mismo sucede si consideramos como casilla de inicio cualquiera de las esquinas. Por tanto, no es posible mover la ficha con las condiciones que establece el enunciado.

Problema 14.- Supongamos que la longitud del lado del cuadrado grande es 4 cm. Para contar de manera ordenada los cuadrados, consideremos de manera separada los de lado 1 cm, 2 cm y 4 cm. Observemos que existen 8 cuadrados de 1 cm de lado, 5 cuadrados de 2 cm de lado (3 en la parte superior y 2 en la parte inferior de la figura) y 1 de 4cm de lado. Por tanto tenemos 8 + 5 + 1 = 14 cuadrados en total.

Problema 15.- Notemos que el acomodo de flechas se repite cada 4 flechas, por lo que resulta indispensable analizar los residuos de la división entre 4. De hecho, notemos que se presenta el siguiente patrón entre los residuos y las flechas:



Entonces, como 2012 es divisible entre 4, hay una flecha vertical que baja desde 2011 hasta 2012.

Problema 16.- Para calcular de manera ordenada la cantidad de “1”s fijándonos en el número de dígitos en cada página. De la página 1 a la 9 el “1” solo aparece una vez, como dígito de las unidades. De la página 10 a la 99 el “1” aparece 19 veces: 9 veces como dígito de las unidades (en el 1**1**, 2**1**, 3**1**, …, 9**1**) y 10 veces como dígito de las decenas (en los números **1**0, **1**1, **1**2, … ,**1**9). Entre la página 100 y 999 el número “1” aparece veces: entre el 100 y el 199 aparece 1 + 19 = 20 veces en las decenas y las unidades, lo mismo sucede entre el 200 y el 299, entre el 300 y el 399, etc.; por tanto, en el dígito de las decenas y las unidades aparece 20 x 9 =180 veces. Además, en las centenas aparece 100 veces (en el 100, **1**01, **1**02, … , **1**99). Por tanto, entre 100 y 999 el número “1” aparece 280 veces. Del 1000 al 1999 el “1” aparece como dígito de las centenas, decenas o unidades 1 + 19 + 280 = 300 veces, además aparece 1000 veces como el dígito de los millares (en el **1**000, **1**001, … , **1**999). Por tanto el número “1” aparece 1300 veces entre el 1000 y el 1999. Finalmente, entre el 200 y el 2011 el número “1” aparece 4 veces (en el 2001, 2010 y 2011). Entonces la respuesta es 1 + 19 + 280 + 1300 + 4 = 1604.

Problema 17.- Como el número tiene tres cifras el dígito de las centena no puede ser cero. Contemos los números felices de acuerdo a cuál es su dígito de las centenas. Si este dígito es 1, la suma de los dos números restantes es 8 y esta suma se puede realizar de 9 formas: 0+8, 1+7, 2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2, 7+1 y 8+0. Por tanto, en este caso tenemos 9 números felices: 108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171 y 180. Si el dígito de las centenas es 2, entonces la suma de los restantes dígitos es 7, por lo que en este caso tenemos 8 números felices: 207, 216, 225, 234, 243, 252, 261, 270. Siguiendo este razonamiento, tendremos las siguientes cantidades de números felices:

Dígito de las centenas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cantidad de números felices	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Por tanto tendremos 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 números felices de tres cifras

Problema 18.- Tony gana más que Leandro, pero menos que Manuel, de modo que Manuel y Tony no son los que ganan menos. Solo quedan Moisés, Leandro y José. Manuel gana más que Moisés y menos que José. De forma que José tampoco es el que gana menos. Así que sólo quedan Moisés y Leandro. Leandro gana más que Moisés. De esta manera podemos concluir que Moisés es el que gana menos.

Problema 19.- Notemos primero que Álvaro miente: si su frase fuese cierta entonces todos son culpables, incluyéndolo a él, pero sabemos que los culpables mienten, así que su frase es falsa, por lo que podemos afirmar que Álvaro es un culpable, y que al menos hay un inocente. Jhonny también miente: si dijera la verdad el único culpable sería Álvaro, pero entonces Puc estaría mintiendo, así que habría al menos otro culpable, lo que contradice la veracidad de su frase, luego Jhonny es culpable. Puc también miente: si dijera la verdad solamente Álvaro y Jhonny serían culpables, pero entonces la frase de Alan sería mentira, lo que llevaría a que hay un culpable más, lo que contradice que Puc dice la verdad, por lo que al menos hay 3 culpables. Un argumento similar al de Jhonny y Puc muestra que Alan miente. Finalmente, notemos que la afirmación de Lobo es compatible con el hecho de que él es inocente y que Álvaro, Jhonny, Puc y Alan son culpables y mienten.

Problema 20.- Para resolver este problema, pongamos todos los datos relevantes en una tabla. Notemos primero que de acuerdo a las condiciones del problema podemos deducir que hay cuatro casas, las cuales denotaremos por los números 1, 2, 3 y 4.

Casa	1	2	3	4
Color	Ni azul ni amarilla			Roja
Vehículo	Patines	Bicicleta		Auto
Mascota	Ni gato ni perro	Ni gato ni oveja	Gato	
Bebida	Jugo	Soda	Vino	

Por eliminación, en la casa 3 hay una motocicleta y en la casa 1 tiene que ser rosa. Como donde hay conejo la casa no puede ser rosa ni tener auto, se concluye por eliminación que en la casa 1 está la oveja, en la casa 2 está el conejo y finalmente en la casa 4 está el perro.

Casa	1	2	3	4
Color	Rosa			Roja
Vehículo	Patines	Bicicleta		Auto
Mascota	Oveja	Conejo	Gato	Perro
Bebida	Jugo	Soda	Vino	

OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS EN YUCATÁN

SELECTIVO ESTATAL DE PRIMARIAS

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Secretaría de Educación
GOBIERNO DEL ESTADO DE YUCATÁN

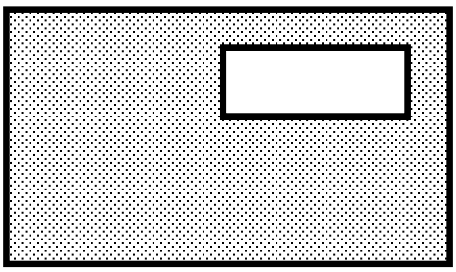
5 de marzo de 2011

INSTRUCCIONES: Resuelve cada uno de los siguientes problemas y escribe la solución en las hojas indicadas. Es importante que escribas todas tus ideas. La duración del examen es de **dos horas.**

Problema 1. Deeds invitó a unos amigos a su fiesta de cumpleaños. Cuando Álvaro llegó a la fiesta, Rodrigo ya estaba ahí. Luis y Dettho llegaron juntos. Jhoni le abrió la puerta a Andrés y Andrés le abrió la puerta a Luis. Rodrigo llegó después de Dettho. ¿Quién de los amigos de Deeds fue el último en llegar a la fiesta?

Problema 2. A Tony le gusta jugar con números. La otra tarde le comentó a su amigo Cristian lo siguiente: He pensado en un número y le he restado 1, después al resultado lo dividí entre 10, después le volví a restar 1 al resultado, después lo volví a dividir entre 10, y al final lo he dividido entre 2. Tony le dijo a Cristian que el resultado final que obtuvo después de hacer todo lo anterior fue 10. ¿Cuál es el número que pensó Tony?

Problema 3. La figura sombreada se formó quitándole a un rectángulo de 62 cm de perímetro un rectángulo más chico de 26 cm de perímetro. Además, el lado mayor del rectángulo chico mide 9 cm en tanto que el lado menor del rectángulo grande mide 14 cm. ¿Cuál es el área de la figura sombreada?



¡Mucho éxito!